استدلال

در مورد تساوی و تشابه

ترجمه: شیوا زمانی
دانشگاه صنعتی شریف

اشاره

تساوی و تشابه مفاهیم ارتباطی مرکزی در مطالعهٔ هندسه هستند. درک این روابط، به دانش‌آموزان ابزاری برای بررسی و تحلیل روابط بین شکل‌ها و خواص آن‌ها، از قبیل تبدیلات، ارائه می‌دهد. این روابط هندسی کمک می‌کند که بسیاری از مفاهیم در هندسه با هم ارتباط پیدا کنند و خود هندسه هم به زمینه‌های دیگر ریاضیات و به مسائل دنیای اطراف ما مرتبط شود. به‌عنوان مثال، مفهوم تشابه به استدلال‌های نسبت و تناسبی، عامل‌های مقیاس، رشد و زوال، و اندازه‌گیری غیرمستقیم ارتباط بسیار نزدیکی دارد. این ارتباطات و نظایر آن مطالعهٔ تساوی و تشابه را در کانون برنامهٔ درسی هندسه قرار می‌دهد.

تمرکز دو فعالیتی که در این فصل ارائه شده، بر تساوی و تشابه به این ترتیب است که درک این مفاهیم برای معنا بخشیدن به فعالیت‌ها و توسعه دادن استدلال محکمی برای جواب مسائل متناظر حیاتی است. مفاهیم هندسی دیگری که در فعالیت اول، دوران مربع، آمده است، شامل ایده‌هایی است مرتبط با مجموع زاویه‌های چندضلعی، دوران‌ها، و مساحت. فعالیت دوم فصل، میدان دید، شامل ارتباطاتی است با اندازه‌گیری، تحلیل داده‌ها، و توابع خطی.

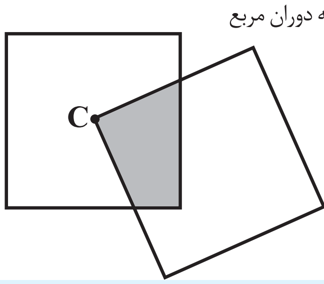
اگرچه معلم‌ها و جلسات کلاسی که این فصل ارائه می‌کند تخیلی است، این فعالیت‌ها در بسیاری از کلاس‌های درس، با طیف گسترده‌ای از دانش‌آموزان انجام شده است. جلسات، استدلال دانش‌آموزان و هدایت و راهنمایی واقعی معلم‌ها را بازتاب می‌دهد، اگر چه کمی ایده‌آل‌سازی و هموار شده‌اند تا خواندنشان راحت باشد.

کلیدواژه‌ها: استدلال، تساوی، تشابه، برنامهٔ درسی

دوران مربع

مسئلهٔ دوران مربع، دو مربع برابر را در وضعیت نشان داده شده در شکل ۱ نمایش می‌دهد.

شکل ۱. مسئله دوران مربع



دوران مربع

دو مربع مساوی (n در n) مانند شکل ۱ هم‌پوشانی دارند. رأس C از یکی از مربع‌ها مرکز مربع دیگر است. اگر مربع به رأس C بتواند حول مرکز C از مربع دیگر دوران پیدا کند، بیشترین مقدار ممکن برای مساحت ناحیهٔ هاشورخوردهٔ هم‌پوشانی دو مربع چیست؟

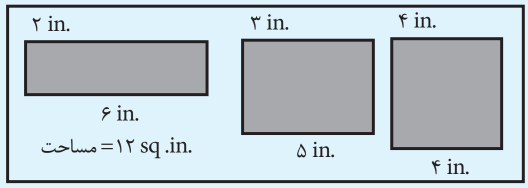
در کلاس درس

آقای لی از دانش‌آموزان کلاس هندسه خود (ترکیبی از دانش‌آموزان کلاس‌های ۹، ۱۰ و ۱۱) می‌خواهد

که وضعیت را در فعالیت دوران مربع بررسی کنند و حدسی را توسعه دهند. او همچنین از آن‌ها می‌خواهد که فکر کنند چگونه می‌خواهند حدس‌هایشان را برای هم‌کلاس‌هایشان توجیه کنند یا توضیح دهند. آقای لی دانش‌آموزانش را به گروه‌های سه نفره تقسیم می‌کند تا بر روی مسئله کار کنند.

دانش‌آموزان گروه ۱ بلافاصله شروع می‌کنند به کشیدن وضعیت‌های ممکن دیگری برای مربع دورانی و متوجه می‌شوند که در یک نقطه، ناحیهٔ هم‌پوشانی یک مربع خواهد بود که مساحتش دقیقاً $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع اصلی است. یکی از اعضای گروه حدس زد که این بیشترین مساحت ممکن است ، زیرا قبلاً در یک فعالیت، دانش‌آموزان خودشان کشف کرده بودند که مربع، بیشترین مساحت را دارد و از آن، برای انجام این فعالیت، استفاده کردند. (برای دیدن یک مثال، شکل ۲ را ببینید).

شکل ۲. مستطیل‌هایی با محیط ۱۶ اینچ

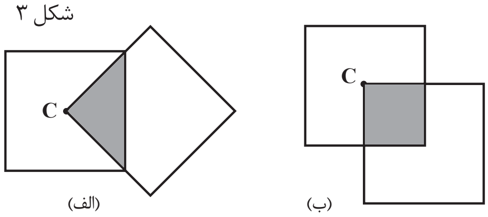


در گروه ۲، یک دانش‌آموز برای تجسم اینکه شکل ناحیهٔ هاشورخورده چگونه با دوران مربع بالایی تغییر می‌کند مشکل دارد. دانش‌آموز دیگری دو مربع مساوی را از کاغذ شطرنجی برید و از نوک مداد خود استفاده کرد تا رأس مربع دورانی را در مرکز مربع دیگر نگه دارد. او با کمک مدل فیزیکی خود به اعضای دیگر گروه نشان می‌دهد که شکل ناحیهٔ هم‌پوشانی چگونه تغییر می‌کند. یکی از اعضای گروه کنجکاو می‌شود که ببیند آیا گروه می‌تواند روشی برای شمارش مربع‌های کاغذ شطرنجی پیدا کند تا مساحت هم‌پوشانی دو مربع را به دست بیاورد. آقای لی مدل فیزیکی ساخته شده توسط گروه ۲ را می‌بینند و از آن‌ها می‌خواهد تا آن را به بقیهٔ کلاس نشان دهند. او فکر می‌کند بقیه هم ممکن است از ساختن چنین مدلی استفاده کنند.

پس از ده دقیقه دیگر بحث و اکتشاف، آقای لی از تمام گروه‌ها می‌خواهد که ایده‌ها و حدس‌های اولیه خود را با همهٔ کلاس در میان بگذارند:

کلسی: [به نمایندگی از گروه ۱] ما چند محل دیگر را برای مربع چرخان امتحان کردیم. دیدیم که این [او به ناحیهٔ هاشورخورده در شکل ۳ اشاره می‌کند] ممکن

شکل ۳



است یک مربع، یک مثلث، یا فقط یک چهارضلعی کلی شود. وقتی یک مربع و یک مثلث باشد، ما مساحت ناحیهٔ هاشورخورده را $\frac{۱}{۴}$ مربع بزرگ به دست آوردیم. ما فکر می‌کنیم که این بزرگ‌ترین مقداری است که به دست می‌آید.

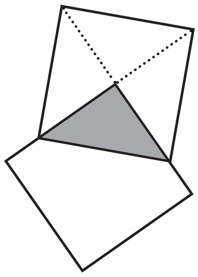
تولو: [به نمایندگی از گروه ۳] ما هم این را دیدیم، اما مطمئن نبودیم که چگونه می‌توانیم مساحت شکل‌های چهارضلعی دیگر را به‌دست آوریم. ممکن است آن‌ها بزرگ‌تر از مربع و مثلث باشند.

آقای لی: خب. آیا کسی راهی برای محاسبهٔ مساحت چهارضلعی‌های کلی‌تر به‌دست آورده است؟ آیا شما می‌توانید به دانش‌آموزان گروه ۳ کمک کنید؟ کس دیگری هست که در این مورد ایده‌ای داشته باشد؟

نیکول: [به نمایندگی از گروه ۴] من یک سؤال متفاوت اما مرتبط دارم. از کجا می‌دانید که شکل مثلثی $\frac{۱}{۴}$ مربع است؟ از کجا می‌دانید که وقتی مربع بالایی را می‌چرخانید، مثلثی را می‌سازد که دقیقاً از گوشه‌های مربع پایینی می‌گذرد؟

کِلسی: اوه، من می‌توانم پاسخ دهم چون خودم هم همین سؤال را داشتم. بنابراین در موردش فکر کردم، و [با بالابردن رسمش برای اینکه آن را به بقیه کلاس نشان دهد؛ شکل ۴ را ببینید] متوجه شدم اگر مرکز مربع زیری [اشاره به مربع ثابت] را به گوشه‌های این مربع وصل کنیم [با نشان دادن اینکه گروهش چطور پاره‌خط کشیده بود]، یک گوشه راست در مرکز خواهید داشت. و مربع بالایی [اشاره به مربع چرخان] هم یک گوشه راست دارد، بنابراین اگر شما آن را به اندازه بچرخانید باید دقیقاً در آن فضا جا بشود. پس اضلاعش باید از مرکز به گوشه‌های مربع زیری برسند.

شکل ۴. رسم کلسی که نشان می‌دهد مثلث $\frac{۱}{۴}$ مربع است



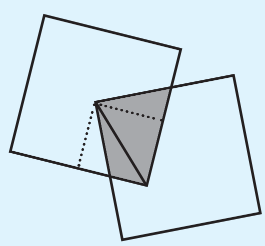
آقای لی: مشاهده خوبی بود. [به نیکول:] می‌بینی؟ [به کلاس:] همـــه آن را می‌بینند؟ یادتان باشـــد، ما می‌دانیم که قطرهای یک مربع بر هم عمود هستند. در این مثال، کلسی از این اطلاعات استفاده می‌کند تا نشان دهد که مربع دورانی می‌تواند طوری جای‌گذاری شود که دقیقاً بین دو قطر قرار گیرد، و ناحیهٔ هاشورخورده مثلثی خواهد بود که $\frac{۱}{۴}$ مربع زیری است. خوب، حالا اگر ناحیهٔ هاشورخورده چهارضلعی کلی‌تری باشد چه؟ آیا کسی راهی برای یافتن مساحت پیدا کرده است؟

آبرام: [به نمایندگـــی گروه ۲] من فکر می‌کنم ما چیزی به‌دســـت آورده‌ایم. ما ایـــن دو مربع را از کاغذ شطرنجی بریدیم [مدل فیزیکی را که قبلاً ساخته شده بود بالا می‌گیرد]. و این گوشـــه را در مرکز مربع دیگر قرار دادیم و مربع بالایی را چرخاندیم. ســـپس ســـعی کردیم با شـــمردن تمام این مربع‌هـــای کوچک روی کاغذ مســـاحت جایی را که هم‌پوشانی داشتند برآورد کنیم. ممکن است اشتباه کرده باشیم، اما فکر می‌کنیم هر طور که مربع بالایی را بچرخانیم مساحت تغییری نمی‌کند. اعداد ما دقیقاً یکی نبـــود، اما آن‌ها در همهٔ حالت‌ها تقریباً یکی بودند و ما فقط داشـــتیم تخمین می‌زدیم.

ناتان: [به نمایندگی از گروه ۵] ما به روش متفاوتی این کار را انجام دادیم، اما به همین نتیجه رســـیدیم- اینکه ناحیهٔ هاشورخورده همیشه $\frac{۱}{۴}$ مربع بزرگ زیری اســـت. ما دیدیم که وقتی مربع بالایی را می‌چرخانیم، مقداری که در یک جهت وارد مربع می‌شـــود مقداری است که شما در جهت دیگر از دست می‌دهید. نمی‌دانم که این حرف معنایی دارد یا نه ... توضیح دادنش سخت است.

آقای لی: می‌توانی به ما نشان دهی؟ بپر بیا [به ناتان می‌گوید که به جلوی کلاس بیاید]

ناتان: تـــلاش خودم را می‌کنـــم. [جلوی کلاس می‌رود و از شـــکلی که آقای لـــی اول کار روی تخته رسم کرده بود استفاده می‌کند. او چند پاره‌خط دیگر را به شـــکل اضافه می‌کند، که در شکل ۵ نشان داده شده است. با اشـــاره به پاره‌خط‌های متعامدی که در



شکل ۵

شکل با نقطه‌چین مشخص شده‌اند، او مشاهده خود را به اشـــتراک می‌گذارد.] ما این خط‌ها را کشـــیدیم چون می‌خواســـتیم مساحت را [با اشـــاره به ناحیهٔ هاشورخورده] با استفاده از مثلث‌ها به دست بیاوریم، و به ارتفاع دو مثلث نیاز داشـــتیم. سپس من متوجه شدم که این مثلث‌های کوچک، یکی درون و دیگری بیرون ناحیهٔ هاشورخورده، یکی هستند. بنابراین، ما فکر کردیم که اگر با یک مربع شـــروع کنیم [اشـــاره به ناحیه هم‌پوشـــانی به شکل یک مربع] و سپس آن را به راســـت بچرخانیم [در خـــلاف جهت عقربه‌های ساعت]، در این صورت، مقداری که چرخانده می‌شود یا مقداری که به دست می‌آید، به اندازهٔ همان مقداری اســـت که از دست می‌دهید. پس مقدار این مساحت، همیشه ثابت است.

چند دانش‌آموز: آهـــا، حالا می‌فهمم. من با ناتان موافقم. من فکر می‌کنم این مســـاحت همیشه یکی خواهد بود.

آقای لی: خب، چه کســـی فکر می‌کند می‌توانیم حدسی در این مورد بنویسیم؟ آماده‌ایم که آن را جور کنیم؟ تولو؟

تولو: بله. وقتی دو مربع مساوی هم‌پوشانی داشته باشـــند، مانند شـــکل، آن‌گاه مقداری که هم‌پوشانی دارند همیشه یکی است، حتی اگر مربع بالایی حول مرکز دوران کند. آه، و مساحت $\frac{۱}{۴}$ مربع زیری است.

بحث در مورد کار دانش‌آموزان روی مسئلهٔ دوران مربع

همان‌طور که در اکتشاف کلاسی نشان داده شد، دانش‌آموزان می‌توانند گســـتره‌ای از روش‌ها را برای حل مسئله مربع دورانی استفاده کنند. دانش‌آموزانی که برای تجسم موقعیت به کمک نیاز دارند می‌توانند به ســـرعت یک مدل فیزیکی از کاغذ یا مقوا بسازند. دانش‌آموزان دیگر ممکن است بتوانند با مداد و کاغذ و بدون دســـتورزی یک مدل کار کنند، در حالی‌که عـــده‌ای دیگر ممکن اســـت بتوانند موقعیـــت را در ذهنشـــان، بدون نیاز به شکل مجسم کنند. ابزار مفید دیگر یک بسته نرم‌افزار هندسه تعاملی است. یک مدل کامپیوتری پویا، ایده‌آل اســـت چون به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد شکلی مانند آنچه در شکل ۱ نشان داده شده بسازند، مساحت مورد نظر را اندازه‌گیری کنند، و به سرعت «جواب» سؤال مساحت ماکسیمم را بیابند. دانش‌آموزانی که در برنامه‌های هندسی تعاملی ماهرند

می‌توانند به سرعت دو مربع بسازند، در حالی که ساختن تنها یک مربع ممکن است برای سایر دانش‌آموزان چالشی باشد. ساختن یک مربع دیگر هم که با اولی مساوی باشد، یک رأس آن در مرکز اولی باشد و بتواند بچرخد ممکن است بعضی از دانش‌آموزان را به چالش بکشد، اما انجام این کارها می‌تواند برای پشتیبانی و معرفی تساوی شکل‌های هندسی عالی باشد.

وقتی دانش‌آموزان با هر وسیله‌ای مدل‌ها را بسازند، سؤال‌هایی پدید می‌آید که لازم است خودشان یا با کمک هم‌کلاسی‌ها یا یک معلم پاسخ دهند. به‌عنوان مثال، دانش‌آموزان باید بفهمند که چگونه «مرکز» مربع ثابت را پیدا کنند. آن‌ها ممکن است سؤال‌هایی بپرسند از قبیل اینکه، «مرکز یک چندضلعی را چطور تعریف می‌کنید؟ آیا برای همهٔ چندضلعی‌ها یک تعریف داریم؟ یا تنها برای چندضلعی‌های منتظم؟» یا «جای مرکز یک چندضلعی منتظم را چگونه پیدا می‌کنید؟ آیا فرآیند پیدا کردن مرکز برای چندضلعی‌های منتظم مختلف فرق می‌کند؟ چطور می‌توانیم چک کنیم که مرکز را پیدا کرده‌ایم؟» دانش‌آموزان ممکن است به سؤال‌های دیگری هم برسند، مانند اینکه آیا ناحیهٔ هاشورخورده همیشه چهارضلعی است، و آیا ممکن است متوازی‌الاضلاع بشود.

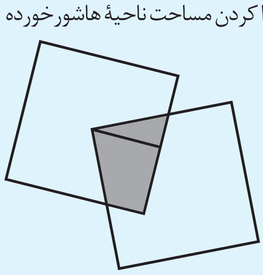
سؤال جالب دیگری که دانش‌آموزان می‌توانند با اکتشاف و در نظر گرفتن خواص مربع‌ها به آن جواب دهند همان است که نیکول در سناریوی کلاس جرقه‌اش را زد: ممکن است ناحیهٔ هاشورخورده مثلثی را پدید بیاورد که از رئوس مربع ثابت عبور نکند؟ اثبات رسمی این گزاره که اضلاع ناحیهٔ هم‌پوشانیِ مثلثی از رئوس مجاور مربع ثابت عبور می‌کنند ممکن است مورد نظر ما نباشد. اما، استدلال غیررسمی که کلسی و معلم کردند به همهٔ دانش‌آموزان کمک می‌کند که ارتباطاتی را با مفاهیم قبلی شکل دهند و فرضی را که خیلی از دانش‌آموزان ممکن است در نظر گرفته باشند توجیه کنند. در این حالت خاص، کلسی قطرهای مربع ثابت را کشید و فهمید که این قطرها یک گوشه راست می‌سازند. تحلیل او از موقعیت، نه تنها با استفاده از اطلاعات داده شده، بلکه با استفاده از ساختار مخفی، به او اجازه داد ارتباط مفیدی با پاسخ یک پرسش برقرار کند و درستی آن را توجیه کند. این‌ها همه عادت‌های استدلال باارزشی هستند که معلمان باید به‌طور منظم در کلاس درس پرورش دهند. بعد آقای لی با روشن کردن و بیان رابطه‌های آموخته شده قبلی (اینکه قطرهای یک مربع بر هم عمودند) از پاسخ کلسی پشتیبانی کرد.

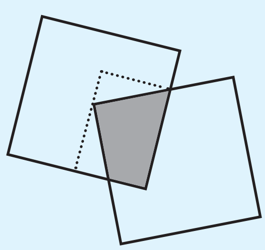
اگرچه دانش‌آموزان به این سؤال که چگونه می‌توان مساحت یک چهارضلعی را در حالت کلی پیدا کرد، با فهمیدن اینکه این مساحت همان مساحت مربع کوچک است، به‌طور غیرمستقیم پاسخ دادند، این سؤال چیزی است که می‌توان آن را با عمق بیشتری با دانش‌آموزان اکتشاف کرد. به‌عنوان مثال، اگر ناتان دو مثلث مساوی را در شکل کشف نکرده بود، معلم می‌توانست با کمک به دانش‌آموزان برای یافتن مساحت چهارضلعی‌های کلی آن‌ها را پیش براند. یافتن مساحت شکل‌های کلی‌تر اغلب با شکستن آن‌ها به شکل‌های آشناتری که مساحتشان راحت‌تر محاسبه می‌شود امکان‌پذیر است. ناتان و اعضای گروهش تلاش کردند چهارضلعی را به دو مثلث تقسیم کنند. یک رویکرد دیگر می‌توانست تقسیم چهارضلعی به یک مثلث راست گوشه و یک ذوزنقه باشد با رسم خط عمودی از مرکز مربع ثابت به یکی از اضلاع آن (شکل ۶. (الف) را ببینید). رویکرد دیگر می‌توانست تشکیل یک مستطیل باشد با اضافه کردن دو مثلث راست گوشه به چهارضلعی هاشورخورده، پیدا کردن مساحت مستطیل، و کم کردن مساحت دو مثلث اضافه شده (شکل ۶. (ب) را ببینید). دانش‌آموزان همچنین ممکن است متوجه شوند که این دو مثلث کوچک اضافه شده مثلث‌های راست گوشهٔ برابری هستند. به اشتراک گذاشتن طیفی از رویکردها به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد رویکردی را انتخاب کنند که برای آن‌ها معقول‌تر به نظر می‌رسد.

سؤال‌ها و نکته‌های قابل بحث ممکنی که در بندهای قبل پیشنهاد شد تنها تعداد کمی از سؤالاتی

وقتی دانش‌آموزان با هر وسیله‌ای مدل‌ها را بسازند، سؤال‌هایی پدید می‌آید که لازم است خودشان یا با کمک هم‌کلاسی‌ها یا یک معلم پاسخ دهند. به‌عنوان مثال، دانش‌آموزان باید بفهمند که چگونه «مرکز» مربع ثابت را پیدا کنند

شکل ۶. دو رویکرد دیگر برای پیدا کردن مساحت ناحیهٔ هاشورخورده


(الف)


(ب)

نگاه اجمالی که به دانش‌آموزان در حال فرموله کردن اثبات حدس دوران مربع شده است، نشان می‌دهد که وقتی استدلال و معنایابی در کلاس ریاضی پرورانده شود چه چیزهایی ممکن می‌شود

هستند که لازم است خود دانش‌آموزان در مورد آن‌ها فکر کنند. پاسخ این پرسش‌ها به دانش‌آموزان کمک می‌کند موقعیتی را که بررسی می‌کنند بفهمند. بدون درک محکمی از اینکه چه چیزی دارد اتفاق می‌افتد و چرا، دانش‌آموزان نمی‌توانند استدلال عمیق‌تری را که برای توجیه جواب مسئله نیاز دارند توسعه دهند. جدول ۱ بعضی از عناصر کلیدی هندسه و عادت‌های استدلالی (NCTM ۲۰۰۹، ص ۹-۱۰، جلد ۵۵) را که با این مسئله و کار اولیهٔ دانش‌آموزان روی آن به نمایش درآمد مشخص می‌کند.

جدول ۱. عناصر کلیدی و عادت‌های استدلالی نمایان در مسئله دوران مربع

عناصر کلیدی استدلال و معنایابی در هندسه

حدس زدن در مورد اشیاء هندسی

استدلال استنتاجی و استقرایی با استفاده از طیفی از نمایش‌ها

ساختن و ارزیابی برهان‌های هندسی

پیشبرد برهان‌های (غیر رسمی) برای توجیه یک حدس

رویکردهای هندسی چندگانه

تحلیل یک موقعیت با استفاده از رویکردهای تبدیلی و ترکیبی

عادت‌های استدلالی

تحلیل یک مسئله

جست‌وجوی ساختار مخفی با رسم خط‌های کمکی

جست‌وجوی الگوها و رابطه‌ها

- آزمون نظام‌مند حالت‌ها
- در نظر گرفتن حالت‌های خاص

ساختن حدس‌های ابتدایی

تأمل روی یک جواب

توجیه یا تحقیق درستی یک جواب از طریق اثبات غیررسمی

بخش بعد نشان می‌دهد که دانش‌آموزان کلاس آقای لی از حدس فراتر می‌روند و با هم کار می‌کنند تا یک برهان رسمی (یا اثبات) برای آن بیابند. اگرچه یک اثبات رسمی همیشه هدف یک درس نیست و ممکن است انتظار مناسبی از همهٔ دانش‌آموزان نباشد، نگاه اجمالی که به دانش‌آموزان در حال فرموله کردن اثبات حدس دوران مربع شده است، نشان می‌دهد که وقتی استدلال و معنایابی در کلاس ریاضی پرورانده شود چه چیزهایی ممکن می‌شود.

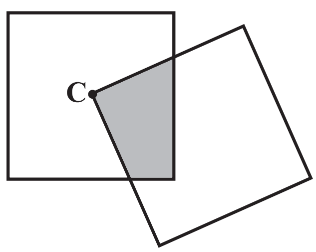
اثبات حدس مربوط به مسئله دوران مربع

آقای لی از دانش‌آموزانش خواست تا با توجیه حدسی که در شناسایی موقعیت شکل ۷ فرموله کرده‌اند قدم بعدی را در اکتشاف بردارند.

اثبات حدس

حدس خود را از اکتشاف دوران مربع- یعنی اینکه مساحت ناحیهٔ هاشورخورده همواره $\frac{1}{4}$ مساحت مربع غیردورانی به مرکز C است و به شکل ناحیهٔ هاشورخورده بستگی ندارد ثابت کنید.

شکل۷. حدس دوران مربع: مساحت ناحیهٔ هاشورخورده همیشه $\frac{1}{4}$ مساحت مربع غیردورانی به مرکز C است.



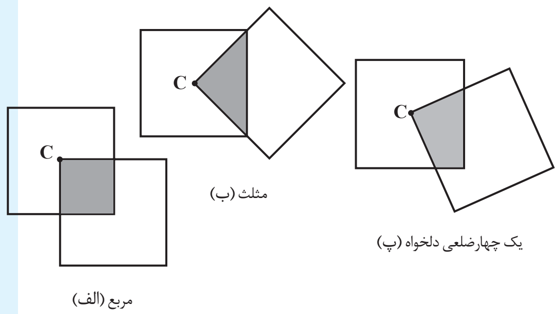
در کلاس درس

آقای لی حدس را روی تخته نوشت و همهٔ دانش‌آموزان را به گروه‌هایشان برگرداند تا روشی را برای اثبات حدس توسعه دهند. او از دانش‌آموزان خواست از چیزهایی که از همکلاسی‌های دیگرشان دیده یا شنیده‌اند استفاده کنند تا روشی برای متقاعد کردن دیگران- شاید کسی که در کلاس نیست- به اینکه حدس درست است پیدا کنند.

دانش‌آموزان گروه ۱ به کار اصلی خود بازمی‌گردند و تصمیم می‌گیرند طیفی از حالت‌ها- یعنی وضعیت‌های متنوعی برای مربع چرخان را نشان دهند. آن‌ها برنامه‌ریزی می‌کنند که مساحت ناحیه هم‌پوشانی را برای هر حالت محاسبه کنند و نشان دهند که همواره $\frac{1}{4}$ مساحت مربع ثابت است. دانش‌آموزان گروه ۳ همین خط فکری را دنبال می‌کنند. آن‌ها در مورد راه‌های به‌دست آوردن مساحت ناحیهٔ هاشورخورده

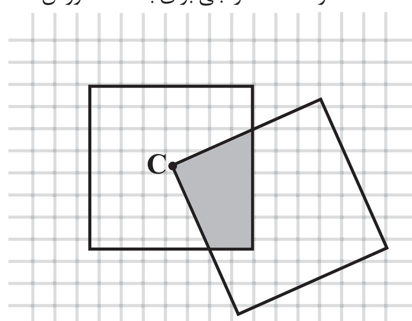
در حالــت کلی با هم بحث می‌کننــد. یک دانش‌آموز می‌خواهد بداند آیا نشان دادن اینکه مساحت این ناحیه در سه حالت مختلف $\frac{1}{4}$ مساحت مربع ثابت است کافی است- یعنی، وقتی ناحیۀ هم‌پوشانی (الف) یک مربع، (ب) یک مثلث، (پ) یک چهارضلعی دلخواه اســت- همان‌طور که در شکل ۸ نشان داده شده است.

شکل۸. سه حالت ممکن برای ناحیۀ هاشورخورده



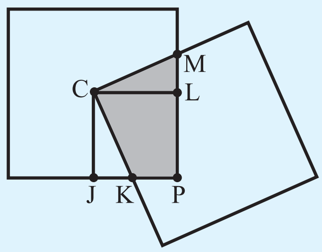
یک دانش‌آمــوز در گروه ۲ می‌خواهــد بداند آیا مساحت‌هایی که گروه با اســتفاده از کاغذ شطرنجی تخمین زده اســت به اندازه کافی قانع‌کننده اســت؟ اعضای گروه در مورد این روش مطمئن نیستند. آن‌ها شمارش همه مربع‌های ریز شطرنجی و سپس تخمین زدن مربع‌هایی را که کاملاً مشمول ناحیۀ هاشورخورده نیستند کار سختی دیده‌اند (شکل ۹. را ببینید). گروه تصمیم می‌گیرد که روش‌هــای دیگری را برای اثبات حدس جست‌وجو کند.

شکل ۹. استفاده از کاغذ شطرنجی برای به دست آوردن مساحت



گروه‌های ۴ و ۵ با یکدیگر کار می‌کنند و ایده‌هایی را که مربوط به کشف ناتان است با یکدیگر به اشتراک می‌گذارند، اینکه وقتــی مربع چرخان از یک وضعیت به وضعیت دیگری حرکت می‌کند مقدار مساحتی که ناحیۀ هاشورخورده از دست می‌دهد برابر است با آنچه به دست می‌آورد. ناتان نمودار خود را دوباره می‌کشد، بعضــی از پاره‌خط‌های غیــرلازم را کنار می‌گذارد و نقاط تقاطع مهم را برچسب می‌زند، همان‌طور که در شــکل ۱۰ نشان داده شده است، و دانش‌آموزان وارد بحث زیر می‌شوند:

شکل ۱۰. رسم ناتان با برچسب‌ها



نیکول: خب، حالا می‌بینم وقتی ما شــکل مربع و شکل مثلث را داریم، مساحت هم‌پوشانی $\frac{1}{4}$ مساحت مربع زیری است. اما ناتان، من هنوز نمی‌فهمم که تو در مورد از دست دادن یک مقدار مساحت و به‌دست آوردن مقدار دیگر وقتی آن را می‌چرخاندی چی می‌گفتی.

زِن: فکر می‌کنم، من می‌توانم به تو نشان دهم. به این مربع نگاه کن، با رئوس C، J، P، و L. به این ترتیب مربع CJPL را داریم، و این ناحیه هم‌پوشانی است. اما وقتی تو مربع بزرگ بــالا را این مقدار [به زاویۀ JCK که از دوران مربع بالایــی در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به وجود می‌آید اشاره می‌کند] حرکت می‌دهی، به همان مقدار از سمت دیگر حرکت می‌کند [به زاویۀ LCM اشــاره می‌کند]. به این ترتیب مثلث JCK و مثلث LCM را داریم، و هر دو مساحت یکسانی دارند. ما تنها باید دیگران را متقاعد کنیم که درست می‌گوییم، همان‌طور که آقای لی گفت.

ناتان: خب، آن دو مثلث ارتفاع یکسانی دارند. چون هر دو در زوایای J و L راست گوشه هستند، و پاره‌خط CJ طولی برابر با پاره‌خط CL دارد. هر دو نصف طول یک ضلع مربع‌اند. اما چطور می‌توانیم دیگران را متقاعد کنیم که قاعده‌های دو مثلث یکی است؟ چرا JK برابر LM است؟

ویل: آن‌هــا برابرند دیگر. مثــل همان چیزی که زِن گفت. وقتی شــما مربع بالایی را این مقدار حرکت می‌دهید، به همان مقدار از سمت دیگر حرکت می‌کند.

ناتــان: اما می‌دانی آقای لی چه می‌خواهد بگوید... «چرا؟» «از کجــا می‌دانید؟» از کجــا مطمئنیم که پاره‌خط‌هــای JK و LM برابرند؟ آیا این را قبلاً جایی دیده‌ایم؟

نیکول: من دو مثلث را می‌بینم، JKC و LMC. آیا می‌توانیم با استفاده از قسمت‌های دیگر، نشان دهیم که

این دو مثلث مساوی‌اند؟ ناتان گفت پاره‌خط‌های CJ و CL با هم مساوی‌اند و هر دو مثلث در J و L گوشه‌های راست دارند. حالا، در کنار پاره‌خط‌های JK و LM، قطعهٔ سوم برای نشان دادن تساوی مثلث‌ها چیست؟ در مورد یک جفت دیگر از زاویه‌ها، مانند زاویه‌های JKC و LCM چه فکر می‌کنید؟

زن: بله، من فکر می‌کنم که تو درست می‌گویی. زاویهٔ JCK و زاویهٔ KCL یک زاویهٔ راست می‌سازند. همین‌طور زاویهٔ LCM و زاویهٔ KCL. بنابراین اگر ما اندازهٔ زاویهٔ KCL را از زاویه‌های راست کم کنیم، این دو زاویه را به دست می‌آوریم (به JKC و LCM اشاره می‌کند) که یک اندازه‌اند.

اولیویا: فکر می‌کنم حالا می‌توانیم همه چیز را در کنار هم قرار دهیم. اگر نشان دهیم که این دو مثلث کوچک با استفاده از ض ز ض برابرند، نشان داده‌ایم که مساحت تکهٔ هاشورخورده همیشه یکی است. همان چیزی که ناتان گفت، فرق نمی‌کند که شما چقدر مربع بالایی را می‌چرخانید، آنچه شما در مثلث JKC از دست می‌دهید، در مثلث LMC به دست می‌آورید.

بحث در مورد یافتن اثبات توسط دانش‌آموزان

این فعالیت ثانویه دانش‌آموزان را وادار کرد در مورد حدس مربوط به دوران مربع عمیق‌تر فکر کنند. تمام گروه‌ها ایده‌هایی برای دست‌یابی به برهانی برای اثبات داشتند. دانش‌آموزان این ایده‌ها را بر کار قبلی خود در توسعه حدس و به اشتراک گذاشتن و بحث کردن کلاسی به دنبال اکتشافات اولیه‌شان بنا گذاشته بودند. اگر چه برهانی که توسط گروه‌های ۴ و ۵ در بخش بالا توسعه پیدا کرد از یک روش خاص پیروی می‌کند- یک رویکرد ترکیبی به یک اثبات صوری- بقیهٔ گروه‌ها در جهت‌های کمی متفاوت حرکت کردند. دو رویکردی که دانش‌آموزان یا معلم در سناریوی بالا صریحاً به آن‌ها اشاره نشد، رویکرد تحلیلی (یا مختصاتی) و رویکرد تبدیلی‌اند.

رویکرد تحلیلی به اثبات، از صفحهٔ مختصات xy استفاده می‌کند. چنین رویکردی از عملیات حساب و جبری استفاده می‌کند و به برقراری ارتباط با کار قبلی دانش‌آموزان در این زمینه‌ها کمک می‌کند. یک اثبات تبدیلی از این واقعیت استفاده می‌کند که مربع بالایی حول یک مرکز داده شده می‌چرخد. دانش‌آموزان می‌توانند سپس استدلال کنند که پاره‌خط‌های CJ و CL در نمودار ناتان به یک اندازه حول مرکز C دوران کرده‌اند، بنابراین اندازهٔ زاویهٔ JKC برابر با اندازهٔ زاویهٔ LCM است. این یک راه جایگزین برای نشان دادن چیزی است که اولیویا با استفاده از کم کردن زاویه‌ها یا زاویه‌های متمم انجام داد. یک برهان تبدیلی دیگر می‌تواند از چهار دوران ۹۰ درجه‌ای متوالی ناحیهٔ هاشورخورده به دست بیاید که نشان می‌دهد ناحیهٔ هاشورخورده $\frac{۱}{۴}$ کل مربع زیری است.

تمرکز این فعالیت بر این است که به دانش‌آموزان کمک کند برهان‌های هندسی خود را توسعه دهند و ارزیابی کنند. پس در حالی‌که دانش‌آموزان با هم کار می‌کنند، به جای اینکه آنچه را که درست به نظر می‌رسد بدون اثبات بپذیرند باید ایده‌های خودشان و دیگران را زیر سؤال ببرند. این فرایند در پرسش‌های ناتان از خودش و از اعضای گروهش در مورد اینکه چرا می‌توان گفت پاره‌خط‌های JK و LM برابرند، مشهود است. با بازتاب یک تذکر آشنا از معلم- «از کجا می‌دانید؟» ناتان اعضای گروهش را تشویق کرد که ادامه دهند تا برهان محکمی برای این حدس بیابند. این سؤال ساده، «از کجا می‌دانید؟» سؤال مهمی است برای کمک به دانش‌آموزان در استفاده از عناصر کلیدی استدلال و معنایابی و توسعه عادت‌های استدلالی، همان‌طور که در جدول ۲ (NCTM ۲۰۰۹، ص ۹-۱۰، جلد ۵۵) خلاصه شده است.

جدول۲. عناصر کلیدی و عادت‌های استدلالی به نمایش درآمده در اثبات حدس

عناصر کلیدی استدلال و معنایابی در هندسه

ساخت و ارزیابی برهان‌های هندسی

در نظر گرفتن نقش شهود تجربی

توسعهٔ یک برهان استنتاجی صوری برای حصول اطمینان ریاضی

رویکردهای چندگانهٔ هندسی

تحلیل یک موقعیت با استفاده از رویکردهای ترکیبی و تبدیلی

عادت‌های استدلالی

تحلیل یک مسئله

جست‌وجوی الگوها و رابطه‌ها

اجرای یک استراتژی

سازماندهی ایده‌ها برای یک جواب

انجام استنتاج‌های منطقی بر پایه پیشرفت فعلی

تأمل روی یک جواب

در نظر گرفتن معقول بودن یک جواب

موجه کردن یک جواب از طریق اثبات رسمی

میدان دید- یافتن معنای تشابه

در فعالیتی که می‌آید، دانش‌آموزان مسئله میدان دید را کشـف می‌کنند (اقتباس شـده از مسئلهٔ لولهٔ مشاهده [کونی و همکاران، ۱۹۹۶، ص. ۴۶])

میدان دید

بیشتر ما یک وقتی از یک لولهٔ مقوایی یا پلاستیکی به‌عنوان تلسکوپ اسـتفاده کرده‌ایم. اگرچه لوله واقعاً چیـزی را که می‌بینیم بزرگ نمی‌کند، اما به ما کمک می‌کند بر یک میدان دید باریک تمرکز کنیم. در این مسئله، شـما روابط بین متغیرهای مرتبط با این لولهٔ مشاهده و میدان دیدی را که توسط لوله فراهم می‌شود، کشف می‌کنید.

رویکرد دانش‌آموزان به این مسـئله از طریق سه فعالیت که به آن‌ها اجازه می‌دهد در زمینه‌های ریاضی متنوعی کار کنند، اتفاق می‌افتد.

فعالیت ۱

در اولین فعالیت مربوط به مسئلهٔ میدان دید، کار با لوله‌های مشـاهده دانش‌آموزان را مشغول گردآوری داده‌ها و اندازه‌گیری می‌کند و به آن‌ها نگاهی اجمالی به الگوها و جبر می‌دهد.

فعالیت ۱: با اسـتفاده از لولهٔ مشاهده‌ای که به شما داده شـده، داده‌ها را جمع‌آوری کنید تا رابطه‌ای بین فاصله چشم بیننده از یک دیوار عمودی و میدان دید بیننده از آن دیوار به دست بیاورید.

> خوب اسـت دانش‌آموزان در فعالیت ۱ از لوله‌هایی با طول و قطر یکسـان استفاده کنند. در این صورت دانش‌آموزان گروه‌های مختلف می‌توانند داده‌ها را با هم مقایسه و ترکیب کنند تا حدس‌ها را بسازند. قبل از اینکه دانش‌آموزان داده‌های خود را گردآوری کنند، معلمـان می‌توانند میدان دید را مسـاحت دایره‌ای تعریف کنند که روی دیوار عمودی از طریق لوله قابل مشاهده است. یا برای ساده‌تر کردن ریاضیات مسئله ممکن اسـت ترجیح دهند که آن را قطر (یا شعاع) دایرهٔ قابل مشاهده با لوله تعریف کنند. راه دیگر این اسـت که اجازه دهند، با فکر خودشان میدان دید را تعریف کنند و آن را اندازه بگیرند.

در کلاس درس

خانم وَن لِدجه لوله‌های دستمال توالت، نوار چسب، و مترهـای چوبی را بین گروه‌های سـه یا چهارتایی دانش‌آموزان کلاس هندسه خود تقسیم می‌کند. با این مواد، به علاوهٔ مداد و کاغذ برای ثبت داده‌ها، هر گروه یک فضای خالی روی دیوار کلاس پیدا می‌کند. خانم ون لدجه پیشـنهاد می‌کند که از چسب نواری برای نشان دادن قطر میدان دید استفاده شود. بیشتر گروه‌ها یک باریکهٔ بلند از نوار را روی دیوار می‌چسـبانند، به شکل موازی با کف کلاس یا عمود بر آن.

استراتژی‌های گردآوری داده‌ها بین گروه‌ها متفاوت اسـت، اما اغلب کم‌کم فاصلهٔ بیننـده از دیوار (متغیر مستقل) را افزایش می‌دهند و از تکنیک‌های متنوعی برای اندازه‌گیری میدان دید بیننده روی دیوار (متغیر وابسته) استفاده می‌کنند. بحثی در مورد تکنیک‌های اندازه‌گیـری بین دو گروه همسـایه در می‌گیرد. یک دانش‌آموز، اسـتیون، متوجه می‌شود که دانش‌آموزان گروه کناری فاصلهٔ چشم بیننده تا دیوار را اندازه‌گیری می‌کنند، اما گروه او فاصلهٔ انگشتان پای بیننده تا دیوار را اندازه می‌گیرد. استیون از اعضای گروه کناری می‌پرسد چرا ایـن اندازه‌گیری را برای ثبت انتخـاب کرده‌اند. خانم ون لدجه مکالمه را می‌شـنود و تمام گروه‌ها را متوقف می‌کند تا مشاهده و سؤال استیون را با آن‌ها در میان بگـذارد و به یک اجماع روی چگونگی گردآوری داده‌های درست برای این فعالیت برسند. معلوم می‌شود که گروه‌ها چهار طول مختلف را اندازه‌گیری می‌کنند (شکل ۱۱ را ببینید)

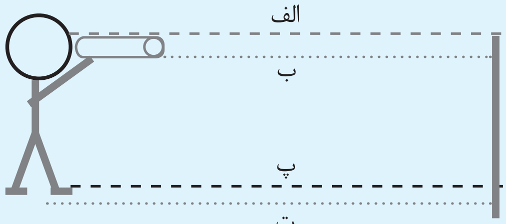
(الف) فاصلهٔ چشم بیننده تا دیوار

(ب) فاصلهٔ انتهای لوله (انتهای دور از چشـم) تا دیوار

(پ) فاصلهٔ انگشتان پای بیننده از دیوار

(ت) فاصلهٔ پاشنهٔ پای بیننده از دیوار

شکل ۱۱. کدام فاصله مفیدترین اندازه است؟



تمرکز این فعالیت بر این است که به دانش‌آموزان کمک کند برهان‌های هندسی خود را توسعه دهند و ارزیابی کنند. پس در حالی‌که دانش‌آموزان با هم کار می‌کنند، به جای اینکه آنچه را که درست به نظر می‌رسد بدون اثبات بپذیرند باید ایده‌های خودشان و دیگران را زیر سؤال ببرند

پس از بحث مختصری در مورد موضوع و بازخوانی فعالیت، همهٔ دانش‌آموزان توافق می‌کنند که فاصلهٔ چشم بیننده تا دیوار باید اندازه‌گیری شود. این مکالمه دو فرض را هم نمایان می‌کند- اینکه بدن بیننده موازی دیوار است و اینکه افق دید بیننده عمود بر دیوار است (یعنی سر به سمت پایین یا بالا خم نشده است).

در پنج دقیقه بعدی، اغلب گروه‌ها گردآوری داده‌هایشان را کامل کرده‌اند و شروع کرده‌اند به جست‌وجوی رابطه‌ای بین فاصلهٔ بیننده از دیوار و میدان دید بیننده. لئو، خان، و ملیسا تصمیم می‌گیرند که نقاط داده را روی یک صفحهٔ مختصات رسم کنند، که محور x آن فاصله از دیوار و محور y آن میدان دید را نمایش دهد. آن‌ها در مورد نمودار حاصل بحث می‌کنند:

ملیسا: خب، این دقیقاً یک خط نیست [با حرکت بین نقطه‌های رسم شده روی کاغذ رسم مقابلش]، اما من می‌گویم که ما یک رابطهٔ خطی داریم. ما فقط در اندازه‌گیری خیلی دقیق نیستیم. شاید باید یک بار دیگر تلاش کنیم و اندازه‌گیری‌هایمان را چک کنیم. من شرط می‌بندم که اگر اندازه‌گیری‌های بهتری داشتیم این شباهت بیشتری به خط داشت.

خان: معادلهٔ یک خط چیست؟ بیایید فقط آن را بنویسیم و با خانم وی چک کنیم. من نمی‌خواهم همه چیز را دوباره اندازه بگیرم.

لئو: یک دقیقه صبر کن- من دو سؤال دارم. اول، این کلاس هندسه است، پس چرا ما داریم نقاط داده را رسم می‌کنیم و به دنبال معادلهٔ یک خط می‌گردیم؟ این مثل جبر است. دوم، اگر قرار است رابطه‌ای بین فاصله و میدان دید پیدا کنیم، مگر قرار نیست از πr^2 استفاده کنیم، یا حداقل از قطر میدان دید؟ این کار کمی هندسه وارد کار می‌کند.

ملیسا: منظورت را می‌فهمم. اما این ممکن است به ما رابطهٔ متفاوتی بدهد، چیزی مثل یک سهمی. فکر می‌کنم خط به اندازهٔ کافی خوب است.

خان: باشد، موافقم. ما می‌توانیم از نقاطی که رسم کردیم با همان πr^2 برای به دست آوردن «میدان دید» واقعی استفاده کنیم. خط اطلاعات لازم برای این کار را به ما می‌دهد.

[خان به جست‌وجو برای یافتن معادله خطی که نقاط داده را برازش کند ادامه می‌دهد. او خط کمرنگی می‌کشد که از نزدیک مبدأ مختصات می‌گذرد و حدوداً سه نقطه از هشت نقطه را به هم وصل می‌کند. پنج نقطهٔ دیگر نزدیک خط قرار می‌گیرند، چهار تا بالای خط و یکی پایین آن. او از دوتا از نقاط داده روی خطش استفاده می‌کند تا شیب را محاسبه کند.]

خان: فکر می‌کنم این خط شبیه $y=0/2\,x$ به اضافهٔ چیز کوچکی است. ببینیم گروه استیون چه چیزی دارد.

ملیسا: بله، به نظر درست می‌آید. هر بار که من ۲۰ سانتی‌متر عقب می‌رفتم، ۳ یا ۴ سانتی‌متر بیشتر از نوار روی دیوار را می‌دیدم. این مثل شیب خط است، $\frac{۴}{۲۰}$ یا ۰/۲، معادلهٔ تو باید درست باشد.

معلم تصمیم گرفت تکنیک‌های اندازه‌گیری را قبل از اینکه آن‌ها گردآوری داده را تمام کنند به بحث بگذارد. این به دانش‌آموزان کمک کرد مجدداً بر متن فعالیت تمرکز کنند و در مورد مناسب و معقول بودن اندازه‌گیری‌هایشان انتخاب‌های درستی کنند

بحث کار دانش‌آموزان در فعالیت ۱

در شروع اکتشاف، معلم ترجیح داد که روش گردآوری داده را به خود دانش‌آموزان واگذار کند. اگرچه دانش‌آموزان به سرعت روش‌هایی برای جمع‌آوری داده پیدا کردند، زود متوجه شدند که روش‌هایشان تفاوت‌هایی با هم دارد. معلم تصمیم گرفت تکنیک‌های اندازه‌گیری را قبل از اینکه آن‌ها گردآوری داده را تمام کنند به بحث بگذارد. این به دانش‌آموزان کمک کرد مجدداً بر متن فعالیت تمرکز کنند و در مورد مناسب و معقول بودن اندازه‌گیری‌هایشان انتخاب‌های درستی کنند. برخی دانش‌آموزان ممکن است در بخش گردآوری داده‌ها در فعالیت راهنمایی بیشتری لازم داشته باشند. پیشنهاد معلم برای استفاده از نوار برای نشان دادن قطر میدان دید شروع خوبی است، اما دانش‌آموزان ممکن است به راهنمایی‌هایی هم در مورد چگونگی تغییر دادن متغیر مستقل- فاصله از دیوار- و اندازه‌گیری متغیر وابسته- قطر یا مساحت میدان دید- نیاز داشته باشند. رویکرد پایان- باز خانم ون لدجه دانش‌آموزان را وادار کرد موقعیت فیزیکی را بفهمند و روش‌هایی برای ریاضی کردن آن بیابند.

دانش‌آموزان گروه ملیسا به سرعت به یک مدل گرافیکی برای نمایش داده‌ها روی آوردند تا رابطه‌ها را جست‌وجو کنند. این مدل به ملیسا و خان کمک کرد تا یک معنای ریاضی به موقعیت فیزیکی ببخشند. ملیسا از این فرآیند یک گام فراتر رفت و تلاش کرد معنای نمایش جبری خان را با مرتبط کردن آن به داده‌ها و موقعیت فیزیکی که خودش تجربه کرده بود بیابد. به این طریق، او توانست معقول بودن حل خان را با ربط دادن شیب به متغیرهای بخش گردآوری داده‌ها، تغییر در فاصله و تغییر در قطر میدان دید،

آزمون کند (استفادهٔ بامعنا از نمادها). جدول ۳ عناصر کلیدی و عادت‌های استدلالی قابل مشاهده (NCTM ۲۰۰۹، ص ۹-۱۰، جلد ۵۵) در این رویکرد را به فعالیت ۱ نشان می‌دهد.

جدول ۳ عناصر کلیدی و عادت‌های استدلالی به نمایش درآمده در فعالیت ۱

عناصر کلیدی استدلال و معنایابی در اندازه‌گیری و جبر

معقول بودن اندازه‌گیری‌ها

قضاوت در مورد اینکه آیا یک اندازه‌گیری مرتبهٔ مناسبی از بزرگی را دارد

تقریب و خطا

درک اینکه همهٔ اندازه‌گیری‌های دنیای واقعی تقریب هستند

استفادهٔ بامعنا از نمادها

انتخاب متغیرها و ساختن عبارت‌ها در متن

ارتباط دادن جبر با هندسه

نمایش موقعیت‌های هندسی به‌طور جبری

عادت‌های استدلالی

تحلیل یک مسئله

جست‌وجوی الگوها و رابطه‌ها

ساختن حدس و برهان‌های اولیه

اجرای یک استراتژی

استفادهٔ هدفمند از رویه‌ها

سازماندهی یک جواب از طریق نمایش داده‌ها و محاسبه

تأمل روی یک جواب

در نظر گرفتن معقول بودن یک جواب

در این زمان، همهٔ دانش‌آموزان در کلاس هندسه خانم ون لدجه توافق دارند که رابطه بین D_w (فاصله از دیوار) و F_w (قطر میدان دید بیننده روی دیوار) خطی است با شیبی حدود ۰/۲ آن‌ها همچنین توافق دارند که شیب نسبت تغییر در میدان دید به تغییر در فاصله تا دیوار را نمایش می‌دهد. اما دانش‌آموزان در مورد اینکه آیا خط نمایش‌دهندهٔ داده‌ها از مبدأ مختصات عبور می‌کند توافق ندارند. برخی می‌گویند عرض از مبدأ y برابر با قطر لوله است چون بیننده همیشه می‌تواند حداقل همین اندازه از دیوار را ببیند. بقیه مخالفند، اشاره می‌کنند که ۰ سانتی‌متر از دیوار (D_w=۰) یعنی از لوله استفاده نمی‌کنیم و بنابراین میدان دیدی هم نداریم (F_w=۰).

فعالیت ۲

خانم ون لدجه تصمیم می‌گیرد که ادامه دهد و به دانش‌آموزان فرصت دهد تا در مورد دیدگاه‌های متفاوتشان فکر کنند. روی تخته، فعالیت ۲ را که جبر را در پیشانی کار قرار می‌دهد می‌نویسد:

فعالیت ۲: لولهٔ مشاهده اصلی خود و لوله‌های مشاهدهٔ دیگری با طول و قطرهای متنوع را بررسی کنید. تمام متغیرهایی را که ممکن است رابطهٔ شما را از فعالیت ۱ تحت تأثیر قرار بدهند شناسایی کنید. یک پاسخ کلی ارائه بدهید طوری که بتوان میدان دید را برای هر لوله‌ای با هر اندازه محاسبه کرد.

در کلاس درس

خانم ون لدجه از دانش‌آموزانش می‌خواهد با در نظر گرفتن تمام متغیرهایی که داده‌های جمع‌آوری‌شده آن‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد کار خود را آغاز کنند. برای کمک به دانش‌آموزان، او لوله‌های دیگری را که کوتاه‌تر، بلندتر، کلفت‌تر، یا باریک‌تر بودند نمایش داد. دانش‌آموزان شروع کردند به فریاد زدن متغیرها، مثل فاصله از دیوار، قطر لوله، و طول لوله.

خانم ون لدجه: خب، همهٔ شما داده‌هایی در مورد لولهٔ اصلی دارید و حالا شما چند لولهٔ دیگر و فهرستی از متغیرهای بالقوه دارید. چه پیشنهادهایی برای یافتن یک جواب کلی‌تر دارید؟

استیون: هر گروه می‌تواند لولهٔ جدیدی بردارد و داده‌های جدیدی را گردآوری کند. بعد می‌توانیم داده‌ها را تجمیع کنیم و به دنبال یک الگوی کلی برای لوله‌ها بگردیم.

جالیسا: الگو بیشتر از دو متغیر خواهد داشت. ما چهار تا را فهرست کرده‌ایم! چه معادله‌ای چهار متغیر دارد؟ نمی‌تواند خطی باشد.

استیون: من فکر می‌کنم هنوز هم می‌تواند یک خط باشد، اما بعضی از متغیرها می‌توانند برای عرض از مبدأ یا شیب استفاده شوند، مثل معادلهٔ اولمان [به معادله‌ای که گروهشان به اشتراک گذاشته بود اشاره می‌کند: y=۰/۱ x+۳/۵، که عرض از مبدأ ۳/۵ قطر لوله را بر حسب سانتی‌متر نشان می‌دهد].

خانم ون لدجه: [خطاب به کل کلاس] در مورد پیشنهاد استیون که دادهٔ بیشتری جمع کنیم و ببینیم به ما چه می‌گوید نظرتان چیست؟

تعدادی از دانش‌آموزان: بله، فکر خوبی است.

استیون: اما باید بدانیم داده‌ها برای کدام لوله هستند. بیایید لوله‌ها را شماره‌گذاری کنیم.

خان: نه، بیایید قطر و طول لوله‌ها را ثبت کنیم. ما گفتیم این‌ها متغیرهای دیگری هستند که باید در نظر بگیریم. بنابراین شاید این اندازه‌گیری‌ها به داده‌های جدیدی که گردآوری خواهیم کرد ربط داشته باشند.

خانم ون لدجه: مشاهده خوبی بود. حتماً ثبت کنید که برای گردآوری سری جدید داده‌هایتان از کدام لوله استفاده می‌کنید. طول و قطر لوله را بنویسید.

> توجه کنید که خانم ون لدجه فعالیت ۲ را معرفی می‌کند اما بلافاصله اجازه نمی‌دهد که دانش‌آموزان آن را شروع کنند. او ابتدا از آن‌ها می‌خواهد که مسئله را در نظر بگیرند و با طوفان فکری استراتژی‌هایی برای حل آن ارائه دهند. این کار به همهٔ دانش‌آموزان فرصت می‌دهد تا مسئله را تحلیل کنند و اطلاعات مرتبط را شناسایی کنند.

خانم ون لدجه لوله‌های جدید را به‌طور تصادفی پخش می‌کند و به گروه‌ها ده دقیقه فرصت می‌دهد تا حداقل پنج داده را ثبت کنند. وقتی دانش‌آموزان شروع می‌کنند به گردآوری داده‌های بیشتر، خان به ملیسا و لئو می‌گوید: «من فکر می‌کنم ما می‌توانیم بدون گردآوری داده‌های بیشتر آن را انجام دهیم. همان‌طور که استیون گفت، متغیرهای دیگر فقط رابطه‌های دیگر در معادله هستند. بیایید لولهٔ اصلی را بگیریم و طول و قطر آن را اندازه‌گیری کنیم. ممکن است نسبت این دو عرض از مبدأ باشد.»

ملیسا و لئو از پیشنهاد خان خوششان می‌آید، اما می‌دانند که باید داده‌های جدید هم جمع کنند تا آن‌ها را با کلاس به اشتراک بگذارند. آن‌ها در حالی که خان فکرش را امتحان می‌کند داده‌ها را با لولهٔ جدید گردآوری می‌کنند. سپس دانش‌آموزان همهٔ گروه‌ها داده‌های جدید را با کلاس به اشتراک می‌گذارند.

فعالیت ۳

پس از اینکه همهٔ داده‌های جدید را در دفترشان یادداشت کردند، خانم ون لدجه فعالیت ۳ را روی تخته نوشت:

فعالیت ۳: از داده‌های جدید و قدیمی استفاده کنید تا یک رابطهٔ کلی بین چهار متغیری که به این ترتیب مشخص شده‌اند پیدا کنید: طول لوله (L_t)، قطر لوله (D_t)، فاصله از دیوار (L_w)، و قطر میدان دید روی دیوار (D_w). راهنمایی: سعی کنید موقعیت فیزیکی را با هندسه مدل کنید.

این فعالیت، که تکلیف خانهٔ دانش‌آموزان خواهد بود، متکی بر مدل‌سازی هندسی، استفاده از مثلث‌های متشابه، و استدلال هندسی است.

در کلاس درس

در شروع کلاس بعد، دانش‌آموزان به گروه‌های روز قبل خود برگشتند تا جواب‌ها و برهان‌هایشان را به اشتراک بگذارند. خانم ون لدجه از هر گروه می‌خواهد تا در مورد بهترین جواب و بهترین برهان به توافق برسند و جواب‌هایشان را روی تلق‌های شفاف بنویسند تا با کلاس به اشتراک بگذارند. گروه‌ها نهایتاً سه خط متفاوت از استدلال را ارائه می‌دهند. یکی از استراتژی‌ها مبتنی بر جبر بود و دو تای دیگر مبتنی بر هندسه است.

استراتژی جبری

گروه جالیسا (و یک گروه دیگر) از ماشین‌حساب‌های گرافیکی خود استفاده کردند تا خطی را بیابند که بهترین برازش را بر داده‌های مربوط به لوله‌های مختلف داشته باشد. آن‌ها سپس به دنبال الگوهایی در میان معادله‌های خطوط و رابطه‌ای با اندازهٔ لوله‌ها گشتند. آن‌ها نتیجه گرفتند که قطر لوله متناسب با شیب خط است. یعنی، قطر لولهٔ بزرگ‌تر شیب بیشتری برای خط متناظر به دست می‌دهد. آن‌ها این نتیجه را برای همکلاس‌هایشان این‌طور توجیه کردند که یک دریچهٔ بزرگ‌تر به قطر بیشتری

برای میدان دید منجر می‌شود، بنابراین شیب باید بیشتر باشد.

دانش‌آموزان در کل با این نتیجه موافق‌اند. جالیسا همهٔ معادلات خطی را روی تلق شفاف نوشته است، و همهٔ آن‌ها را به ترتیب اندازهٔ قطر لوله در یک نمودار مرتب کرده است. به راحتی می‌توان دید که نتیجه برای داده‌ها درست است. اما، نیک و دیگران متوجه می‌شوند که دو لوله که قطر یکسانی دارند متناظر با معادلات خطی هستند که شیب‌های متفاوتی دارند. لولهٔ کوتاه شیب بیشتری دارد. جالیسا به سرعت با یک دلیل جلو آمد.

جالیسا: بله، ما هم آن را دیدیم. اگر لوله کوتاه‌تر باشد، دید شما خیلی بسته نمی‌شود، بنابراین مثل این است که دریچهٔ دید فراخ‌تری داشته باشید.

نیک: بنابراین، تو می‌گویی شیب هم به اندازهٔ قطر و هم به طول لوله بستگی دارد. چون این همان چیزی است که ما گفتیم. ما روش متفاوتی برای نشان دادن آن داریم.

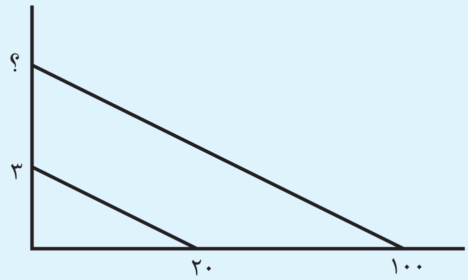
جالیسا: بله، فکر می‌کنم می‌توانی این‌طور بگویی. من مطمئن نیستم که چطور آن را بنویسم. لولهٔ کوتاه‌تر میدان دید بزرگ‌تری می‌دهد، پس نسبت معکوس دارند، درست است خانم وی؟ نمی‌دانم چطور آن را در جدولمان نشان دهم. شاید بتوانیم به نسبت قطر و طول لوله نگاه کنیم.

نیک: این چیزی است که ما سعی کردیم نشان دهیم.

خانم ون لدجه: به نظر می‌رسد که باید آن را آزمون کنیم. می‌خواهید این ایده را نگه داریم و جواب‌های دیگر را ببینیم؟

استراتژی هندسی ۱

گروه لئو رویکرد دیگری را به اشتراک می‌گذارد. اعضای گروه ایده روز گذشتهٔ خان را-ایده اینکه عرض از مبدأ نسبت قطر لوله به طول آن است- بررسی کرده‌اند. آن‌ها متوجه شدند که این رابطه درست نیست، اما در عوض فهمیدند که نسبت قطر لوله به طول لوله یک مقدار تقریبی برای شیب خطوطی که آن‌ها پیدا کرده‌اند به دست می‌دهد. با توجه به پیشنهاد خانم ون لدجه به استفاده از هندسه، لئو تصمیم گرفته است که از مثلث‌های متشابه استفاده کند تا نتیجهٔ خان را در مورد شیب توجیه کند چون مثلث‌های متشابه متناسبند، همان‌طور که نسبت‌های بین متغیرها $(\frac{D_t}{L_t} \propto \frac{D_w}{L_w})$ متناسب‌اند. لئو نموداری مانند شکل ۱۲ را به اشتراک می‌گذارد و برهان خود را برای کلاس توضیح می‌دهد.



شکل ۱۲. نمودار لئو

لئو: من قطر را روی محور عمودی و طول یا فاصله را روی محور افقی قرار دادم. بنابراین ۳ یعنی قطر لوله ۳ سانتی‌متر است، و ۲۰ برای طول ۲۰ سانتی‌متر است. به این ترتیب، اگر یک متر از دیوار فاصله داشته باشید، یعنی ۱۰۰ سانتی‌متر، برای یافتن میدان دید ۱۰۰ را روی محور افقی قرار می‌دهید و مقدار مجهول را از مثلث‌های متشابه می‌یابید.

خانم ون لدجه: کسی سؤالی از لئو دارد؟

جالیسا: من. از کجا فهمیدید که باید مثلث‌های متشابه بسازید؟

لئو: همان‌طور که قبلاً گفتم، شیب نسبت قطر به طول لوله است. دیروز نشان دادیم که میدان دید و فاصله از دیوار هم شیب خط را نشان می‌دهند، پس این دو نسبت برابر خواهند بود. بنابراین، مثلث‌های متشابه.

جالیسا: این را فهمیدم، اما چرا مثلث‌ها را به این شکل کشیدی؟

لئو: تنها به این روش می‌توانستم در مورد مقایسه قطر با طول فکر کنم.

خانم ون لدجه: لئو، یا دیگرانی که به این روش فکر کردند، می‌توانید برای بقیه توضیح دهید از کجا می‌دانید مثلث‌ها متشابه‌اند؟

لئو: من آن‌ها را این‌طور کشیدم. من آن‌ها را طوری کشیدم که متشابه باشند، چون معادلات نسبت‌هایی را نشان می‌داد که صحبتش را کردم.

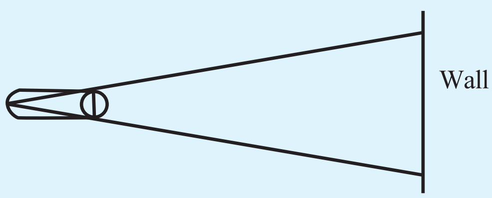
خانم ون لدجه: آیا چیز دیگری در مورد گردآوری داده‌ها یا چگونگی تحلیل داده‌ها از دیروز هست که مرتبط با مثلث‌های متشابه باشد؟

ملیسا: این قسمت مرا هم گیج کرده است. من در گروه لئو هستم به همین دلیل می‌خواستم

منظورش را بفهمم، اما مطمئن نبودم که بتوانیم این مثلث‌های متشابه را بکشیم فقط به این دلیل که می‌دانیم آن‌ها باید مثلث‌های متشابهی باشند. من می‌خواستم این معنای بیشتری داشته باشد... مثلاً اینکه ما مثلث‌های متشابه را کشیدیم چون این کاری است که داشتیم انجام می‌دادیم. اما پاسخ من هم معنی نمی‌دهد. پاسخ لئو بهتر است.

استراتژی هندسی ۲

مت و آنا تلق خود را روی پروژکتور قرار می‌دهند (شکل۱۳ را ببینید). این تلق هم مثلث‌های متشابه دارد، اما رسم آن با آنچه لئو نشان داد متفاوت است. آنا توضیح می‌دهد که نمودار چگونه موقعیت گردآوری داده‌ها را مدل می‌کند.



شکل۱۳. رسم مت و آنا از مثلث‌های متشابه در موقعیت گردآوری داده‌ها

آنا: خب اینجا لوله است [به شکل اشاره می‌کند]، و این مثلث کوچک متشابه را می‌سازد. از چشم شما تا سر دیگر لوله. مثلث بزرگ از چشم شما تا دیوار امتداد دارد.

مت: و ما می‌دانیم که طبق قضیهٔ زاویه- زاویه مثلث‌ها متشابهند. ما یک زاویه در چشممان داریم، و خطوط موازی برای قطر لوله و میدان دید داریم.

آنا: خطوط موازی هستند چون ما لوله را به همین صورت در دست گرفتیم. و خطوط موازی زاویه‌های برابر می‌سازند.

مت: پس، اگر شما طول لوله و قطر آن را بدانید، می‌توانید از تناسبی که لئو نشان داد، $\frac{D_t}{L_t} \propto \frac{D_w}{L_w}$، استفاده کنید و میدان دید را برای هر فاصله‌ای که در L_w قرار می‌دهید به دست آورید.

آنا: یا می‌توانید از طول و قطر لوله استفاده کنید تا شیب خط را بیابید. بعد معادلهٔ خط را بنویسید، و از آن برای یافتن میدان دید استفاده کنید.

پایان باز فعالیت‌ها به دانش‌آموزان انعطاف و استقلال داد تا تصمیم‌گیری کنند. در عین حال، معلم این را روشن کرد که انتظار داشت دانش‌آموزان پاسخ‌هایشان را توجیه کنند

خانم ون لدجه: دیگران در مورد آنچه آنا و مت گفتند چه فکر می‌کنند؟ این راه‌حل با آنچه شما تا به حال دیده‌اید یا گروهتان به‌دست آورده است چقدر سازگار است؟

جالیسا: من فکر می‌کنم این راه کاملاً با توضیحات من سازگار است. این ترسیم چیزی را که من می‌گفتم نشان می‌دهد، دریچهٔ بزرگ‌تر یعنی شما می‌توانید بیشتر از لوله ببینید. اما من از آن خوشم آمد چون این را هم توضیح می‌دهد که چرا متغیرها به طریقی که لئو و نیک گفتند با هم رابطه دارند.

بحث در مورد کار دانش‌آموزان در فعالیت‌های ۲ و ۳

در حالی‌که دانش‌آموزان در فعالیت ۳ داده‌های جدید و برهان‌های ممکن را برای رابطه‌ای که به‌دست آورده بودند در نظر می‌گرفتند، راهنمایی‌ها و پیشنهادهای معلم بعضی از گروه‌ها را هدایت می‌کرد، اما نه همهٔ آن‌ها را. به‌عنوان نمونه، گروه جالیسا، از این راهنمایی که هندسه ممکن است در توجیه حدس آن‌ها در مورد متغیرهای مسئله میدان دید نقشی ایفا کند استفاده‌ای نکردند. در عوض، گروه او یک رویکرد جبری را انتخاب کرد و در مجموعه معادلات (یک معادله برای مجموعه داده‌های هر لوله) به دنبال یک الگو گشت. توضیح جالیسا برای کلاس نه تنها چگونگی یافتن الگو توسط گروه او را نشان داد، بلکه نشان داد چرا آن الگو برای پدیدهٔ فیزیکی مورد مطالعه معنی می‌دهد (دریچهٔ پهن‌تر به معنای میدان دید بزرگ‌تر و بنابراین شیب بیشتری برای معادله است). تا وقتی مت و آنا جواب خود را به اشتراک نگذاشته بودند جالیسا نتوانسته بود روی برهانش تأمل کند و با یک نمایش هندسی ارتباط برقرار کند. لئو تلاش کرد پیشنهاد یافتن یک مدل هندسی را وارد کار کند و با زیرکی مثلث‌های متشابه را انتخاب کرد. اما، او نتوانست موقعیت فیزیکی را به درستی مدل کند، و برهان او نشان داد که او برخی از ارتباط‌ها را جا انداخته است. جدول۴ عناصر کلیدی استدلال و معنایابی و عادت‌های استدلالی (NCTM ۲۰۰۹، ص ۹-۱۰، جلد ۵۵) را که در کار دانش‌آموزان در فعالیت‌های ۲ و ۳ نمایش داده شد نشان می‌دهد.

جدول۴ عناصر کلیدی و عادت‌های استدلالی به نمایش درآمده در فعالیت‌های ۲ و ۳

عناصر کلیدی استدلال و معنایابی در جبر و هندسه

استفادهٔ معنادار از نمادها

استفاده از متغیرها برای ساختن و تفسیر عبارت‌ها

ارتباط دادن جبر با هندسه

نمایش دادن موقعیت‌های جبری به‌طور هندسی

ساختن و ارزیابی برهان‌های هندسی

توسعه و ارزیابی برهان‌هایی در مورد شکل‌ها برای معنایابی برای یک موقعیت

ارتباطات و مدل‌سازی هندسی

استفاده از ایده‌های هندسی در موقعیت‌های دنیای واقعی

عادت‌های استدلالی

تحلیل یک مسئله

شناسایی مفاهیم و نمایش‌های ریاضی مرتبط

به‌کارگیری مفاهیم پیش‌آموخته برای موقعیت‌های جدید

اجرای یک استراتژی

سازماندهی جواب، شامل محاسبات و نمایش داده‌ها

استنتاج منطقی با توسیع داده‌های اولیه

جست‌وجو و استفاده از ارتباط‌ها

مرتبط کردن زمینه‌ها و نمایش‌های مختلف

تأمل روی یک جواب

تفسیر یک جواب و اینکه چگونه مسئله را حل می‌کند

تعمیم یک جواب

فعالیت میدان دید طیفی از مفاهیم ریاضی را در محیطی پدید می‌آورد که اجازه می‌دهد دانش‌آموزان در حالی که معنی موقعیت مسئله را می‌فهمند بین مطالب محتوایی هم ارتباطاتی برقرار کنند. معلم به دانش‌آموزان فرصتی را که لازم داشتند داد تا اکتشاف کنند و در مورد نکات مربوط به اندازه‌گیری و گردآوری داده‌ها، استراتژی‌های حل مسئله، و توسعهٔ استدلال‌های ریاضی بحث کنند. پایان باز فعالیت‌ها به دانش‌آموزان انعطاف و استقلال داد تا تصمیم‌گیری کنند. در عین حال، معلم این را روشن کرد که انتظار داشت دانش‌آموزان پاسخ‌هایشان را توجیه کنند. مطابق با این انتظار، دانش‌آموزان جواب‌ها را توضیح دادند، برهان‌ها را به اشتراک گذاشتند، و در مورد اعتبار برهان‌هایشان بر مبنای ارتباط آن‌ها با مدل فیزیکی و فرایند گردآوری داده‌ها بحث کردند.

جمع‌بندی

مسائلی که در این فصل مثال زده شدند مربوط به مفاهیم هندسی تساوی و تشابه هستند، اما آن‌ها فهم هندسه تبدیلی، اندازه‌گیری، و نمایش‌های جبری را نیز نیاز دارند. غنای این مسائل اجازه اکتشاف و بحثی را می‌دهد که استدلال و معنایابی را ایجاب می‌کند. هر جلسهٔ کلاس درس معلم را در نقش راهنمای دانش‌آموزان نشان داد اما نه کسی که استراتژی‌های حل را عرضه می‌کند.

به‌عنوان مثال، در کلاس آقای لی، دانش‌آموزان بدون نیاز به کمک معلم در ابتدا، روی مسئله دوران مربع کار کردند. وقتی آن‌ها شروع کردند به عرضه کردن ایده‌های اولیه خود، آقای لی از همهٔ دانش‌آموزان سؤالاتی پرسید تا آن‌ها را وادار کند فراتر از مدل‌های ایستایی که روی کاغذهایشان کشیده‌اند فکر کنند. او مدام از آن‌ها می‌خواست که فکر کنند چه‌طور می‌توانند ایده‌هایشان را به موقعیت کلی‌تری انتقال بدهند- محلی تصادفی برای مربع چرخان.

مسئله میدان دید در آغاز خیلی پایان- باز بود، اما سه فعالیتی که هر یک بر پایهٔ قبلی طراحی شد به دانش‌آموزان این شانس را داد که یک مجموعه داده را قبل از افزودن متغیرها و مجموعه داده‌های جدید اکتشاف کنند. راهنمایی فعالیت ۳ برای ارتباط دادن مجموعه‌های داده به یک مدل هندسی، وقتی برای دانش‌آموزان مفید واقع شد که دانش‌آموزان به نقطه‌ای رسیدند که یک برهان را توسعه دهند. بالاخره، همهٔ دانش‌آموزان توانستند این ارتباط را برقرار کنند.

در اکتشاف هر دو مسئله- دوران مربع و میدان دید- از دانش‌آموزان انتظار می‌رفت که برای توسعهٔ مهارت‌های حل مسئله، فرموله کردن حدس‌ها برای توضیح موقعیت‌های ریاضی، با یکدیگر کار کنند و برای توضیح دادن یا توجیه نتایجشان از استدلال استفاده کنند.

منبع

Focus in High School Mathematics Reasoning and sense Making. by: Sharon M. McCrone, James King, Yuria Orihuela & Eric Robinson.